Über die Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich

Zobel, Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.101-106

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über die Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich

Von **Robert Zobel,** Braunschweig
Vorgelegt von **Hans-Joachim Kowalsky**

Topological spaces are studied fullfilling the following condition: Every real-valued, continuous function, defined on a compact subset, can be extended to the full space. A space X fullfills this condition if and only if all different points $x, y \in X$ such that $\{x, y\}$ is a discrete subspace of X can be separated by a continuous, real-valued function. This condition is taken as a separation axiom T_{2b}. The relation of T_{2b} with other separation axioms and the condition „T_{2b} and T_1" are studied.

In der Maßtheorie spielt beim Satz von Lusin die Frage eine Rolle, wann eine auf einer kompakten Teilmenge eines topologischen Raumes definierte, stetige Abbildung stetig auf den ganzen Raum fortsetzbar ist. Diese Frage wurde schon von Stone in seiner grundlegenden Arbeit [6] behandelt. Stone stellt dabei das folgende fest: Eine stetige Abbildung von einer kompakten Teilmenge eines topologischen Raumes X in die reellen Zahlen ist genau dann fortsetzbar, wenn sie nur solche Punkte trennt, die bereits durch eine stetige Abbildung von X in die reellen Zahlen getrennt werden. Er beweist diesen Satz mit der von ihm in der gleichen Arbeit gegebenen Verallgemeinerung des Weierstrass'schen Approximationssatzes. In dieser Arbeit soll nun gefragt werden, welche topologischen Räume generell diese Fortsetzungseigenschaft haben. Es zeigt sich, daß dadurch ein Trennungsaxiom erhalten wird wie bei der entsprechenden Frage nach der Fortsetzbarkeit von abgeschlossenen Mengen. Der Beweis wird ohne den Approximationssatz geführt.

Einige Bezeichnungen: Ein Punktepaar x, y eines topologischen Raumes (X, u) heißt (u-)diskret, wenn $x \neq y$ und $\{x, y\}$ als Unterraum von (X, u) diskret ist. Genau dann ist (X, u) T_1-Raum, wenn jedes Paar verschiedener Punkte von X u-diskret ist. Eine stetige Abbildung von (X, u) in den topologischen Raum $(R, w^{\cdot})$, der Menge der reellen Zahlen mit der Betragstopologie, wird eine (u-)Funktion auf X genannt. Ein Punktepaar x, y von (X, u) heißt (u-)trennbar, wenn eine u-Funktion auf X existiert, die x, y trennt. Jedes trennbare Punktepaar ist diskret. Ist andererseits ein Punktepaar nicht diskret, so gibt es keine stetige Abbildung in einen T_1-Raum, die das Punktepaar trennt. Auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ wird die gewöhnliche Topologie w des absoluten Betrages zugrunde gelegt, falls nichts anderes gesagt wird. $\underline{u}_x$ bezeichnet den Umgebungsfilter des Punktes x bei der Topologie u.

SATZ 1: Sei (X, u) ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

(1) Jedes diskrete Punktepaar von (X, u) ist trennbar.

(2) Jede auf einem endlichen Unterraum von (X, u) definierte (stetige) Funktion ist stetig auf (X, u) fortsetzbar.

(3) Jede auf einem kompakten Unterraum von (X, u) definierte (stetige) Funktion ist stetig auf (X, u) fortsetzbar.

(4) Es existiert eine stetige Abbildung Φ von (X, u) nach $([0,1], w)^k$, die für eine hinreichend große Kardinalzahl k genau die diskreten Punktepaare von (X, u) trennt.

(5) Es gibt auf X eine T_{3a}-Topologie v mit $u \leqq v$, so daß jedes u-diskrete Punktepaar auch v-diskret ist.

Bew: (1) $\longleftrightarrow$ (4):

(1)$\rightarrow$(4): Sei F das System aller stetigen Abbildungen von (X, u) nach $([0,1], w)$. Eine stetige Abbildung Φ von (X, u) nach $([0,1], w)^F$ erhält man, wenn man für die Koordinate $f \in F$ und $x \in X$ fordert $(\Phi(x))_f = f(x)$. Ein diskretes Punktepaar wird wegen (1) durch eine u-Funktion und damit auch durch ein $f \in F$ getrennt, also auch durch Φ. Umgekehrt werden nur diskrete Punktepaare durch Φ getrennt, da Φ stetige Abbildung in einen T_1-Raum ist.

(4)$\rightarrow$(1): In dem normalen Raum $([0,1], w)^k$ sind alle Punktepaare trennbar. Da Φ alle diskreten Punktepaare von (X, u) trennt, folgt (1).

(1) $\longleftrightarrow$ (5):

(1)$\rightarrow$(5): $\{U : U$ ist Urbild einer offenen Teilmenge von (R, w') bei einer u-Funktion f auf $X\}$ ist System aller offenen Mengen einer Topologie v auf X. Nach [3] ist (X, v) sondiert durch (R, w'). Jedenfalls ist (X, v) T_{3a}-Raum. Wegen (1) ist ein u-diskretes Punktepaar u-trennbar und damit auch v-diskret.

(5)$\rightarrow$(1): Wegen (5) ist jedes u-diskrete Punktepaar auch diskretes Punktepaar einer gröberen T_{3a}-Topologie v, mithin v-trennbar, erst recht also u-trennbar.

(3)$\rightarrow$(2)$\rightarrow$(1) ist unmittelbar klar. Es bleibt zu zeigen (1)$\rightarrow$(3). Wegen (1)$\rightarrow$(4) reicht es hin zu zeigen:

(4) $\rightarrow$ (3):

Der Beweis wird durch ein Diagramm verdeutlicht:

$$\begin{tikzcd}
(X,u) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "\hat{g} \circ \Phi"] & & ([0,1],w)^F \arrow[dl, dashed, "\hat{g}"'] \\
& (R,w') & \\
(K,u_K) \arrow[uu, "i_K"] \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\Phi_K"] & & (\Phi(K), w^F_{\Phi(K)}) \arrow[uu, "i_{\Phi(K)}"'] \arrow[ul, dashed, "g"]
\end{tikzcd}$$

Die mit $\longrightarrow$ bezeichneten Abbildungen sind dabei nach Voraussetzung bekannt. Es ist (K, u_K) ein kompakter Unterraum von (X, u), Φ_K die Einschränkung von Φ auf K. $\Phi(K)$ mit der Spurtopologie $w^F_{\Phi(K)}$ ist kompakte Teilmenge von $([0,1], w)^F$. h ist eine Funktion auf K. Es existiert nun ein stetiges g mit $g \circ \Phi_K = h$. g ist wohldefiniert, da für $x, y \in K$ aus $h(x) \neq h(y)$ folgt, daß das Punktepaar x, y u-diskret ist, wegen (4) also durch Φ getrennt wird. g ist stetig: Denn ist $A \subset R$ abgeschlossen, so auch $h^{-}(A)$, das Urbild von A bei h. Als abgeschlossene Teilmenge von K ist $h^{-}(A)$

sogar kompakt, mithin auch $\Phi(h^{-}(A))$. Da $(\Phi(K), w^{F}_{\Phi(K)})$ Hausdorff-Raum ist, ist $\Phi(h^{-}(A))$ also sogar abgeschlossene Teilmenge von $\Phi(K)$. Nun gilt aber $g^{-}(A) = \Phi(h^{-}(A))$, und es folgt die Behauptung. $\Phi(K)$ ist kompakte, mithin abgeschlossene Teilmenge des normalen Raumes $([0,1],w)^{F}$. Also besitzt g eine Fortsetzung $\hat{g}$ auf $([0,1],w)^{F}$. Damit ist $\hat{g} \circ \Phi$ die gesuchte Fortsetzung von h auf (X,u).

DEFINITION: (X,u) **heißt ein** T_{2b}**-Raum, wenn jedes diskrete Punktepaar von** (X,u) **durch eine stetige Funktion getrennt werden kann.**

Aus Satz 1 liest man sofort die folgende Bemerkung ab:

Bemerkung: Ein T_{2b}-Raum besitzt die folgenden Eigenschaften:
(1) Ist x,y ein diskretes Punktepaar, so gibt es abgeschlossene Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.
(2) Für zwei Punkte $x,y \in X$ gilt $\underline{u}_x \leqq \underline{u}_y$ oder $\underline{u}_y \leqq \underline{u}_x$ oder $\underline{u}_x \wedge \underline{u}_y = o$.
(3) Aus $\bigcap \underline{u}_x \cap \bigcap \underline{u}_y \neq \emptyset$ folgt $\bigcap \underline{u}_x \subset \bigcap \underline{u}_y$ oder $\bigcap \underline{u}_y \subset \bigcap \underline{u}_x$. Auf jeden Fall ist x,y kein diskretes Punktepaar.
(4) Seien $x,y \in X$ und v die feinste T_{3a}-Topologie mit $u \leqq v$. Dann gilt sogar $\underline{v}_x = \underline{v}_y$ oder $\underline{v}_x \wedge \underline{v}_y = o$.

T_{2b} ist von $T_0 - T_5$ unabhängig. Aus T_{3a} folgt T_{2b}, aber nicht umgekehrt. Dies wird durch einige Beispiele belegt.

$\{0,1\}$ mit der trivialen Topologie liefert einen T_{2b}-Raum, der kein T_0-, T_1-, T_2-, T_{2a}-Raum ist. (T_{2a}- oder Urysohn-Raum heißt ein topologischer Raum, in dem je zwei Punkte durch abgeschlossene, disjunkte Umgebungen getrennt werden.) Der Sierpinski-Raum $\{0,1\}$ mit $\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$ als System offener Mengen ist ein T_{2b}-Raum, aber kein T_3-, erst recht also kein T_{3a}-Raum. Da es vollständig reguläre Räume gibt, die nicht normal sind, vgl. etwa [1] S.365, gibt es also T_{2b}-Räume, die nicht T_4, erst recht nicht T_5 erfüllen.

Ein T_{3a}-Raum ist nach Satz 1 (5) ein T_{2b}-Raum. Es gibt aber reguläre Räume, die als einzige Funktionen die konstanten besitzen ([1], [2]). Ein solcher Raum ist kein T_{2b}-Raum. Also folgt aus keiner der Trennungseigenschaften regulär, T_{2a}, T_2, T_1 oder T_0 schon T_{2b}. Vollständig reguläre, erst recht also normale und vollständig normale Räume erfüllen T_{2b}. T_4 und selbst T_5 allein reicht hierzu nicht aus, wie $\{1,2,3\}$ mit $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ zeigt. Dieser Raum ist endlich und damit kompakt, es erfüllen also nicht einmal kompakte T_5-Räume notwendigerweise T_{2b}. Wohl aber erfüllt ein kompakter T_{2b}-Raum T_4. Lokal kompakte Hausdorff-Räume sind T_{2b}-Räume. Der Sierpinski-Raum zeigt jedoch, daß lokal kompakte T_{2b}-Räume und sogar kompakte T_{2b}-Räume nicht notwendigerweise auch T_{3a}-Räume sind. Stone [7] spricht von semiregulären Räumen, wenn $\{k(A) : A \text{ abgeschlossen} \wedge A \subset X\}$ eine Basis von X ist (k Kernoperator). Auch Semiregularität und T_{2b} sind unabhängig.

Das System aller T_{2b}-Topologien einer mindestens dreipunktigen Grundmenge X bildet keinen Verband. Es ist nicht einmal durchschnittsstabil: Sei $x,y \in X$ und $x \neq y$. Durch $S = \{o,\{x\},X\}$ und $T = \{o,\{y\},X\}$ erhält man auf X zwei T_{2b}-Topologien, deren Durchschnitt T_{2b} nicht erfüllt.

T_{2b} überträgt sich im allgemeinen nicht auf Quotiententopologien, wie das abgeschlossene Intervall [0,3] mit den Äquivalenzklassen [0,1], (1,2) und [2,3] zeigt. Unterräume von T_{2b}-Räumen sind T_{2b}-Räume. Summenräume erfüllen T_{2b} genau dann, wenn jeder Summand T_{2b}-Raum ist. Für Produkträume gilt eine solche Aussage nur unter Zusatzvoraussetzungen. Es tritt eine kleine Schwierigkeit auf, die man schon am Produkt P zweier Exemplare des Sierpinski-Raumes abliest: Der Punkt (1,1) besitzt nur P als Umgebung. Folglich sind alle Funktionen auf P konstant. Obwohl der Sierpinski-Raum keine diskreten Punktepaare besitzt, gibt es in P mit (0,1), (1,0) ein solches Paar. T_{2b} ist also verletzt. Es gilt aber der folgende

SATZ 2: Für jedes $i \in I$ sei (X_i, u_i) topologischer Raum: Genau dann ist $\bigtimes_{i \in I}(X_i, u_i)$ T_{2b}-Raum, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $i \in I$ ist (X_i, u_i) T_{2b}-Raum.

(2) Für alle $i \in I$ bis auf höchstens eins gilt:
Sind $x_i, y_i \in X_i$ und existiert ein u_i-offenes $U_i \subset X_i$ mit $x_i \in U_i$ und $y_i \notin U_i$, so sind x_i, y_i bereits u_i-diskretes Punktepaar von X_i.

Bew: Sei $(X, u) = \bigtimes_{i \in I}(X_i, u_i)$ T_{2b}-Raum. Dann ist auch (X_i, u_i) als homöomorphes Bild eines Unterraumes von (X, u) T_{2b}-Raum. Erfüllt für ein $i \in I$ (X_i, u_i) nicht die Bedingung (2), so besitzt (X_i, u_i) ein homöomorphes Bild des Sierpinski-Raumes als Unterraum. Gibt es mindestens zwei solcher Räume, so besitzt (X, u) das homöomorphe Bild des Produktes zweier Sierpinski-Räume als Unterraum, im Widerspruch dazu, daß jeder Unterraum von (X, u) T_{2b}-Raum ist.

Sei nun (1), (2) erfüllt und x, y ein diskretes Punktepaar des Produktraumes (X, u). Dann gibt es ein u-offenes $U \subset X$ mit $x \in U$ und $y \notin U$ und ein u-offenes $V \subset X$ mit $x \notin V$ und $y \in V$. Für $i \in I$ sei p_i die Projektion von X auf den Koordinatenraum X_i. I_1 sei die Menge derjenigen $i \in I$ mit $p_i y \notin p_i U$ und I_2 der $i \in I$ mit $p_i x \notin p_i V$. Es sind I_1 und I_2 nicht leer. Existiert ein $i' \in I_1 \cap I_2$, so ist $p_{i'} x$, $p_{i'} y$ ein $u_{i'}$-diskretes Punktepaar auf $X_{i'}$, das nach Voraussetzung durch eine $u_{i'}$-Funktion g auf $X_{i'}$ getrennt wird. $g \circ p_{i'}$ trennt somit x, y. Sind I_1, I_2 disjunkt, so besitzt $I_1 \cup I_2$ mindestens zwei Elemente, also gibt es ein $i' \in I_1 \cup I_2$, so daß $(X_{i'}, u_{i'})$ die Bedingung (2) erfüllt. Es gilt also entweder $p_{i'} x \in p_{i'} U$ und $p_{i'} y \notin p_{i'} U$ oder $p_{i'} x \notin p_{i'} V$ und $p_{i'} y \in p_{i'} V$. Wegen (2) reicht aber eine dieser Eigenschaften bereits aus, $p_{i'} x$, $p_{i'} y$ ist $u_{i'}$-diskretes Punktepaar auf $X_{i'}$ und man schließt weiter wie oben.

Die Bedingung (2) des Satzes 2 ist dann schon erfüllt, wenn in (X_i, u_i) nur diskrete Punktepaare existieren. Damit erhält man die

Folgerung: Für jedes $i \in I$ sei (X_i, u_i) T_1-Raum: Genau dann ist $\bigtimes_{i \in I}(X_i, u_i)$ T_{2b}-Raum, wenn für alle $i \in I$ (X_i, u_i) T_{2b} Raum ist.

Die Forderung T_1 T_{2b} schließt also gewisse Schwierigkeiten aus. Satz 1 vereinfacht sich dann zu

SATZ 3: Sei (X, u) ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

(1) Je zwei Punkte von (X, u) werden durch eine (stetige) Funktion getrennt.

(2) Jede auf einem endlichen Unterraum definierte reellwertige Abbildung kann zu einer (stetigen) Funktion auf (X, u) **fortgesetzt werden.**

(3) (X, u) **ist** T_1**-Raum, und jede auf einem kompakten Unterraum von** (X, u) **definierte Funktion ist stetig auf** (X, u) **fortsetzbar.**

(4) (X, u) **ist stetig und injektiv in** $([0,1], w)^k$ **einbettbar für eine geeignete Kardinalzahl** k.

(5) Es gibt eine vollständig reguläre Topologie v **auf** X **mit** $u \leqq v$.

Bemerkung: Teilaussagen dieses Satzes finden sich bereits in der Literatur, so $(1) \longleftrightarrow (4)$ in [1] und $(1) \longleftrightarrow (3)$ in [6].

Ein topologischer Raum, der T_1 und T_{2b} erfüllt, heißt nun z. B. in [4] „vollständig Hausdorff'sch" und ein Raum, in dem je zwei verschiedene Punkte durch abgeschlossene Umgebungen getrennt werden, ein T_{2a}- oder Urysohn-Raum. Steen und Seebach [5] bezeichnen genau umgekehrt. Die Analogie zu „regulär" und „vollständig regulär" würde für die Bezeichnung in [4] sprechen. Die Stellung von $T_{2b} \wedge T_1$ im System der Trennungsaxiome wird sofort klar, wenn man feststellt, daß jeder vollständig reguläre Raum $T_{2b} \wedge T_1$ erfüllt und jeder $T_{2b} \wedge T_1$-Raum ein Urysohn-Raum (im Sinne von [4]) ist. $T_{2b} \wedge T_1$ ist von der Regularität unabhängig (Vgl. auch [5]). [4] erfaßt die $T_{2b} \wedge T_1$-Räume als in einem gewissen Sinne total unzusammenhängende Räume. In einem Diagramm stellen sich die Zusammenhänge zwischen den hier betrachteten Trennungsaxiomen folgendermaßen dar:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{regulär} \arrow[dr] & & & & \\
\text{vollst. normal} \arrow[r] \arrow[d] & \text{normal} \arrow[r] \arrow[d] & \text{vollst. regulär} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[d] & T_{2b} \wedge T_1 \arrow[r] \arrow[d] & T_{2a} \arrow[r] & T_2 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & T_0 \\
T_5 \arrow[r] & T_4 & T_{3a} \arrow[r] \arrow[dr] & T_{2b} & & & & \\
 & & & T_3 & & & & \\
 & & & \text{regulär} \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

Alle weiteren Implikationen erhält man durch Hintereinanderschaltung.

Literatur

[1] van Est, W.T. und Freudenthal, H.: Trennung durch stetige Funktionen in topologischen Räumen. Indagationes Math. 13, 359–368 (1951).
[2] Hewitt, E.: On two problems of Urysohn. Annals of Math. (2) 47, 503–509 (1946).
[3] Kowalsky, H.J.: Topologische Räume. Basel–Stuttgart: Birkhäuser Verlag (1961).
[4] Preuß, G: Trennung und Zusammenhang. Monatshefte für Mathematik 74, 70–87 (1970).
[5] Steen, L.A. und Seebach, J.A. jun.: Counterexamples in Topology. New York–Chicago–London: Holt, Rinehart und Winston, Inc. (1970).
[6] Stone, M.H.: The Generalized Weierstrass Approximation Theorem. Math. Mag. 21, 167–184 und 237–254 (1947/48).
[7] Stone, M.H.: Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Transactions of the Amer. Math. Soc. 41, 375–481 (1937).